仿射/凸(锥)、集/组合/包

回顾：数学规划/优化 Mathematical programming / Optimization

(min) minimize $f_0(x)$

(s.t.) subject to $f_i(x) \le b_i \quad i=1,\dots,m$

$x=[x_1 \ \cdots \ x_n]^T$

Chapter 2 : Convex Sets

仿射集 Affine Sets

给定两点 $x_1 \neq x_2 \in R^n$，写出直线方程：

$$y=\theta x_1+(1-\theta)x_2$$
$$=x_2+\theta(x_1-x_2), \quad \theta \in R$$

从 x_2 出发，沿 x_1-x_2 方向变换变量 θ，可以画出一条贯穿两点的直线

给定两点 $x_1 \neq x_2 \in R^n$，写出线段方程：

$$y=\theta x_1+(1-\theta)x_2, \quad \theta \in [0,1]$$

⇒ 仿射集：一个集合 C 是仿射集，若 $\forall x_1, x_2 \in C$，则连接 x_1 与 x_2 的直线也在集合内。

若干个点的集合

∴ 直线是仿射集，线段不是。一个二维空间也是。

设 $x_1, \cdots, x_k \in C$，$\theta_1, \cdots, \theta_k \in R$，且

$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1$ 仿射集 C

则有仿射组合：$\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$

这样一个仿射组合也应在 C 内。

仿射集性质：

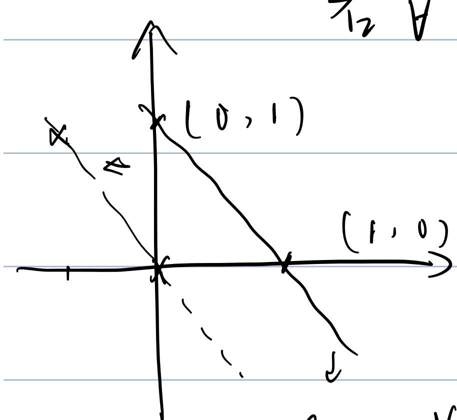
① $x_1, x_2 \in C$，C 为仿射集 $\Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$

② 假设集合 $V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in C\}$，$\forall x_0 \in$

则 V 为与 C 相关的子空间，对于这样特殊的仿射集，

若 $\forall V_1, V_2 \in V$，则对 $\forall \alpha, \beta \in R$

$\Rightarrow \alpha V_1 + \beta V_2 \in V$



↪ 该子空间一定经过原点。

C，$V = \{x - (1,0) \mid x \in C\}$

重要问题: 线性方程组的解集是仿射集

① 已知 $C=\{x \mid Ax=b\}$, $A\in R^{m\times n}$, $b\in R^{m}$, $x\in R^{n}$

证明 $\forall x_1, x_2\in C$, 有 $Ax_1=b$, $Ax_2=b$

令 $\theta\in R$, $\theta x_1+(1-\theta)x_2 \in C$

$A(\theta x_1+(1-\theta)x_2)=\theta Ax_1+(1-\theta)Ax_2=b$

∴ 有 $\theta x_1+(1-\theta)x_2\in C$

即任意线性方程组的解集一定是一个仿射集.

② 与之相关的子空间?

$V=\{x-x_0 \mid x\in C\}$ $\forall x_0\in C$

$=\{x-x_0 \mid Ax=b\}$, $Ax_0=b$ (x_0在这一步假设已定

$=\{x-x_0 \mid A(x-x_0)=0\}$

$=\{y \mid Ay=0\}$ ↓

化零空间.

③ 反之, 任意仿射集都可以写成一个线性方程组的解集

问题2 给定集合C (仿射/非仿射), 构造一个最小的仿射集.

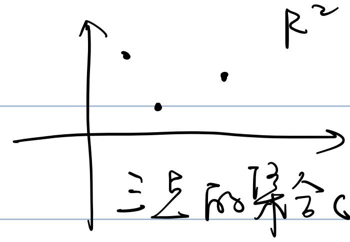
↓

不一定是仿射集

仿射包 aff $C=\left\{\theta_1x_1+\cdots+\theta_kx_k \;\middle|\; \begin{array}{l}\forall x_1\cdots x_k\in C\\ \forall \theta_1+\cdots+\theta_k=1\end{array}\right\}$

仿射包一定是个仿射集.

仿射集的仿射包是它自己。



$\xrightarrow{\text{仿射包}}$ 整个二维平面

凸集 Convex Set

1) 一个集合 C 是凸集 $\Leftrightarrow$ 当任意两点之间的线段仍在 C 内

(2) C 为凸集 $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in C$，对 $\forall \theta \in [0,1]$

$$\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C.$$

∴ 仿射集一定是一个凸集。

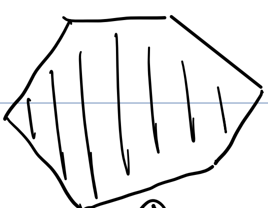
$x_1, \cdots, x_k$ 的凸组合

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \quad \begin{cases} \theta_1 \cdots \theta_k \in R \\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1 \\ \theta_1 \cdots \theta_k \in [0,1] \end{cases}$$

∴ (3) C 为凸集 $\Leftrightarrow$ 任意元素凸组合在 C 内

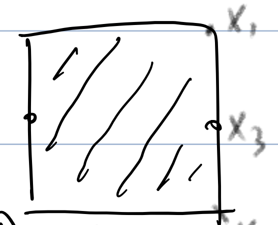
凸包

凸包：$C \subset R^n$，$\mathrm{Conv}\, C = \left\{ \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \theta_1 \cdots \theta_k \in R \\ \forall \theta_1 \cdots \theta_k \in [0,1] \\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1 \end{array} \right\}$



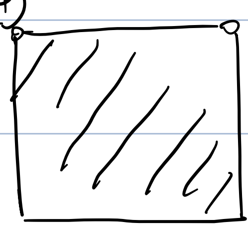
① 凸集 ✓

② ✗



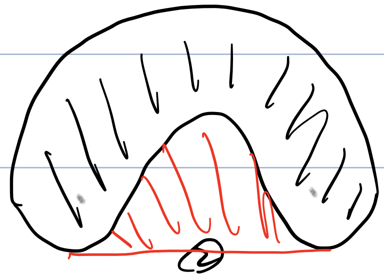
③ ✗

如 x_1、x_2 连线中间的 x_3 没在集合内 ⇒ 不是凸集



④ ✓

在上述图形基础上构造凸包，①④为其本身.



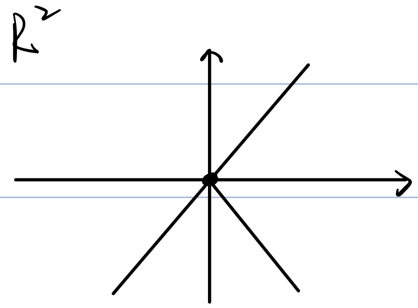
②加上两点即可.

另外，如果是离散点的集合，在最小圆把所有点连起来的封闭空间即是凸包.

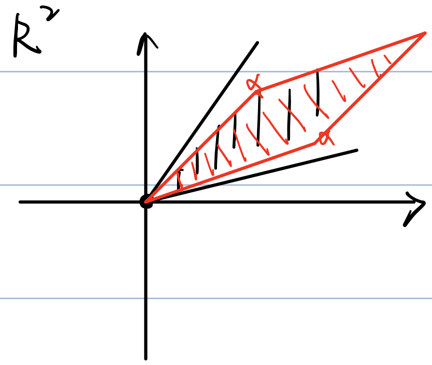
锥 Cone　凸锥 Convex Cone

C 是锥 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in C$, $\theta \geq 0$, 有 $\theta x \in C$

C 是凸锥 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in C$, θ_1、$\theta_2 \geq 0$, 有 $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$



三条射线从原点出发，构成的集合是锥.



由无穷多条从原点出发的射线组成，其构成的集合是锥. 又由任意两点连成的线段都在集合内，因此是凸集 $\Longrightarrow$ 凸锥 ✓.

应该是图示的平行四边形

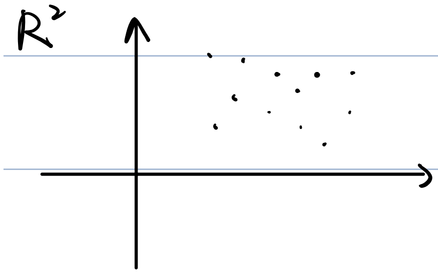
凸锥组合

$\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, $\theta_1 \cdots \theta_k \geq 0$

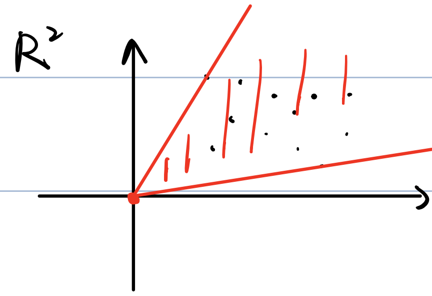
凸锥包

不一定是凸锥

$x_1, \cdots, x_k \in C$, $\left\{ \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \cdots x_k \in C \\ \theta_1 \cdots \theta_k \geq 0 \end{matrix} \right\}$



凸锥包



凸锥和特例

① 仿射组合 $\forall \theta_1, \cdots, \theta_k, \ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$

凸组合 $\forall \theta_1, \cdots, \theta_k, \ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$

$\theta_1, \cdots, \theta_k \in [0, 1]$

凸锥组合 $\forall \theta_1, \cdots, \theta_k, \ \theta_1, \cdots, \theta_k \geq 0$

② 任一仿射集一定是凸集。

任一凸锥一定是凸的。

③ 如果集合内只有一个点，$C = \{x\}$，仍然是仿射集，因此一定是凸集，如果 x 在原点上，则集合 C 还是一个凸锥。

④ 空集仍然是仿射集、凸集、凸锥。