回顾

考虑集合 C，选取 k 个点，$x_1, \cdots, x_k \in C$

选取 $\theta_1, \cdots, \theta_k \in R$，构造 $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$

① 仿射组合：$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1$

② 凸组合：$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1$

$\theta_1, \cdots, \theta_k \geq 0$

③ 凸锥组合：$\theta_1, \cdots, \theta_k \geq 0$.

$\Downarrow$

对于集合 C，其①还在 C 内 $\Rightarrow$ 仿射集

② $\Rightarrow$ 凸集

③ $\Rightarrow$ 凸锥

$\Downarrow$

仿射集 $\Rightarrow$ 凸集 $\Leftarrow$ 凸锥

$\Downarrow$

对于集合 C，即使它并非上面任意一种集合，我们仍可在 C 中选取任意 k 个点，构造出仿射/凸(锥)组合，并把所有新点放在新集合中，即构造出了对应包

几种重要的凸集

	仿射集	凸集	凸锥
R^n空间	✓	✓	✓
R^n空间的子空间	✓	✓	✓

一定要有原点，加减操作后一定仍落在空间中.

与CVXOPT-1中提到的与集合C相关的子空间区分

n维空间的子空间一定是凸锥.

	仿射集	凸集	凸锥
任意直线	✓	✓	不一定（过原点✓）
任意线段	×（一个点✓）	✓	×（原点✓）
$\{x_0+\theta v \mid \theta \geq 0\}$, $x_0 \in R^n, \theta \in R, v \in R^n$	×（$v=\vec{0}$时✓）	✓	×（$x_0=\vec{0}$时✓）

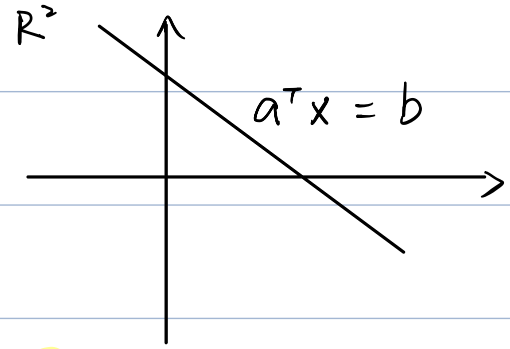
→ 以x_0为起点，沿v方向发出的射线

	仿射集	凸集	凸锥
超平面	✓	✓	×（过原点✓）
半空间	×	✓	×（$b=0$则✓）
球	×（$r=0$时✓）	✓	×（$x_c=\vec{0}$且$r=0$时✓）
椭球	×（$P\to 0$时✓）	✓	×（$P\to 0$且$x_c=\vec{0}$时✓）
多面体		✓	
单纯形		✓	
对称矩阵集合$S^n=\{X\in R^{n\times n} \mid X=X^T\}$		✓	✓
对称半正定矩阵集合$S_+^n=\{X\in R^{n\times n} \mid X=X^T, X\succeq 0\}$		✓	✓
对称正定矩阵集合$S_{++}^n=\{X\in R^{n\times n} \mid X=X^T, X\succ 0\}$		✓	×

表示特征值≥0.

超平面：$\{x \mid a^T x = b\}$，$x, a \in R^n$，$b \in R$，$a \neq 0$

一个集合，把所有满足一个性质（与向量a的内积$=b$）的向量x放在其中。



=> 则该直线称为超平面

半空间：上例的超平面把R^2空间分割成了两个半空间

$a^T x \geq b$ 与 $a^T x \leq b$

球：$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\}$

$= \{x \mid \sqrt{(x-x_c)^T(x-x_c)} \leq r\}$

证明：$\forall x_1、x_2 \in B$，有 $\|x_1 - x_c\|_2 \leq r$，$\|x_2 - x_c\|_2 \leq r$

$\forall \theta \in [0,1]$，证 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in B$

由于 $\|\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - x_c\|_2$

$= \|\theta(x_1 - x_c) + (1-\theta)(x_2 - x_c)\|_2$

$\leq \theta\|(x_1 - x_c)\|_2 + (1-\theta)\|x_2 - x_c\|_2 \leq r$

（假设有 $a, b \in R^n$，有 $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ 三角不等式）

椭球：$\mathcal{E}(x_c, P) = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \leq 1\}$

加权二范数

$x_c \in R^n$，$P \in S^n_{++}$

描述半轴长，由P的奇异值决定。

$n \times n$的对称的正定矩阵，一个+表示非负定

每个特征值都>0

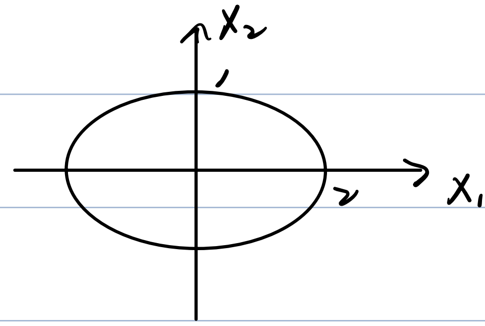
构造$A^T A$，求其特征值(≥ 0) $eig(A^T A)$，则$\sqrt{eig(A^T A)}$即为A的奇异值。

e.g. ① $P = r^2 I_n \ (r \neq 0)$，则退化为球的定义.

② $\mathcal{E} = \left\{ x \mid x^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x \le 1 \right\}$

$= \left\{ (x_1, x_2) \mid \frac{1}{4} x_1^2 + x_2^2 \le 1 \right\}$

该例中，P的特征值分别为1、4，则奇异值为1、2



多面体 Polyhedron

$P = \{ x \mid a_j^T x \le b_j \quad j = 1 \cdots m$ m个不等式

$c_j^T x = d_j \quad j = 1 \cdots p \}$ p个等式

每个表达一个半空间　每个表达一个超平面

⇒ 表示一些半空间和一些超平面的交集，即多面体

多面体不一定有界限，而在每个维度上都有界(即每个轴上的取值有界)的称：有界多面体.

单纯形（一种特殊的多面体）Simplex

R^n空间中选择 $V_0, \cdots, V_k$ 共 $k+1$ 个点，

$V_1 - V_0, \cdots, V_k - V_0$ 线性无关。

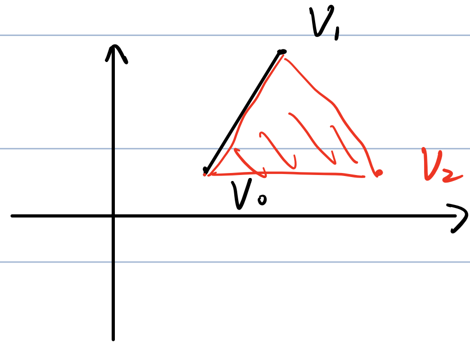
则与上述点相关的单纯形为：

$C = \mathrm{Conv}\{V_0, \cdots, V_k\} = \{ \theta_0 V_0 + \cdots + \theta_k V_k, \ \theta \ge 0, \ 1^T \theta = 1 \}$

由这个$\{v_0,\cdots,v_k\}$基础上构造的凸包　$\theta_0,\cdots,\theta_k \geq 0$

$\theta_0+\cdots+\theta_k = 1$

e.g.　R^2空间中



① 显然，$v_1 - v_0$ 为非零向量，线性无关，其凸包为线段.

② 增加上 v_2，显然，$v_2 - v_0$ 和 $v_1 - v_0$ 线性无关，其凸包为三角形.（二维空间中最多只有两个向量能够线性无关. 也就无法找到4个及以上的点，即不存在一个四边形为单纯形.

即，R^2 中最多有三角形，R^3 中最多有四面体为单纯形.

证明：单纯形一定是多面体

设一单纯形 C，其中元素 $x \in R^n$，则：

$x = \theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k$，$\vec{\theta} \geq \vec{0}$，$\vec{1}^T\theta = 1$

且 $v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_0$ 线性无关

设 $\vec{y} = [\theta_1, \cdots, \theta_k]^T$，有 $\vec{y} \geq \vec{0}$ 且 $\vec{1}^T y \leq 1$

$B = [v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_0] \in R^{n \times k}$

$\therefore X = (1-\theta_1-\cdots-\theta_k)V_0 + \theta_1 V_1 + \cdots + \theta_k V_k$

$= V_0 + \theta_1(V_1-V_0) + \cdots + \theta_k(V_k - V_0)$

$= V_0 + B\vec{y}$

由于B的列向量线性无关，则 $r(B)=k$，$k\le n$

对于这样列满秩的矩阵，可以将其化为：

$$B \to \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} k\times k \\ (n-k)\times k \end{array}$$

一定能找到非奇异矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \in R^{n\times n}$

使得 $AB = \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad X = V_0 + B\vec{y} \iff AX = AV_0 + AB\vec{y}$

(右⇒左在两端乘 A^{-1}，因此要求A非奇异)

$\iff \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} V_0 + \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \vec{y}$

$\iff \begin{cases} A_1X = A_1V_0 + \vec{y} \\ A_2X = A_2V_0 \end{cases}$

变量

$\iff \begin{cases} A_1X \geq A_1V_0 \\ \vec{1}^T \cdot A_1X \leq 1 + \vec{1}\cdot A_1V_0 \\ A_2X = A_2V_0 \end{cases}$ (多面体的定义)

即单纯形中任意一点都可用上式描述，且上式一定可以描述单纯形中任意一点 ⇒ 得证.

证明：S_+^n 为凸锥

$\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$, $\forall A, B \in S_+^n$

$\theta_1 A + \theta_2 B = C$

① 对称性：易得 C 为对称矩阵

② 半正定性：

NOTE： $\forall x \in R^n$，若 $x^T A x \geq 0$，则 A 为半正定矩阵

$\because$ 有 $x^T A x \geq 0$， $x^T B x \geq 0$

而 $x^T C x = x^T(\theta_1 A + \theta_2 B) x$

$= x^T \theta_1 A x + x^T \theta_2 B x \geq 0$

$\therefore S_+^n$ 为凸锥，也是凸集

另：① $n=1$ 时，① $S_+^n = R_+$

② $S_{++}^n = R_{++}$（正实数集合），不是凸锥，

但仍是凸集

③ $S^n = R$

在 R^n 空间内，对于②：

$\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$， $\forall A, B \in S_{++}^n$，有 $x^T A x$，$x^T B x > 0$

而 $C = \theta_1 A + \theta_2 B$， $x^T C x$ 在 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 时不满足

但是凸集，但非凸锥 $\Leftarrow$ $x^T C x > 0$

② $\{x \mid x \le 0\}$ 是否为单纯形？

是，可以找到 $x_1 = 0$，$x_2 = -\infty$

由这两点构成的凸包即为 $\{x \mid x \le 0\}$

③ 对于 $n=2$ 情况，矩阵集合 S_+^n 可以这样描述

$$S_+^n = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \,\middle|\, x \geq 0,\ z \geq 0,\ xz \geq y^2 \right\}$$

NOTE:

对于 2×2 半正定矩阵 A，$|A| = xz - y^2 = \lambda_1 \lambda_2$

$\operatorname{trace}(A) = x + z = \lambda_1 + \lambda_2$

由于 A 半正定 $\Rightarrow \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow xz \geq y^2$

即 n 较小时，易将矩阵空间对应到实数空间.