凸集的交集

① 若 S_1、S_2 为凸，则 $S_1 \cap S_2$ 为凸.

② 推广：若 S_a 为凸集，$\forall a \in A$（A是下标的集合）

则 $\bigcap_{a \in A} S_a$ 为凸集

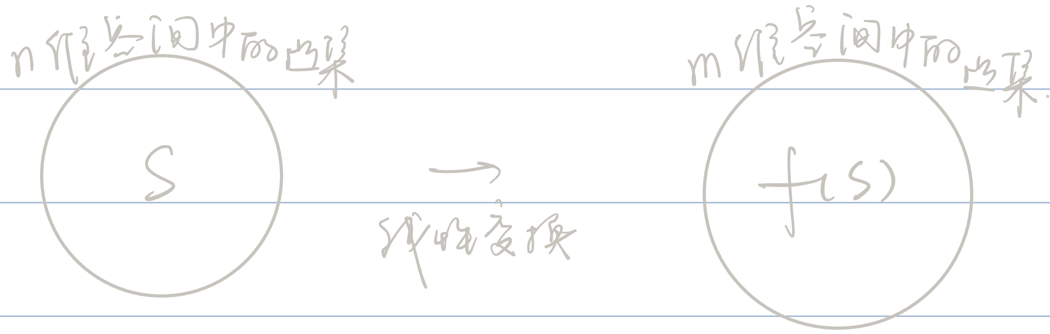
仿射函数

仿射即线性映射

① $f: R^n \to R^m$ 是仿射的，当 $f = Ax + b$，$A \in R^{m \times n}$，$b \in R^m$

② 若 $S \in R^n$ 是凸集，$f: R^n \to R^m$ 仿射，

则 $f(S) = \{ f(x) \mid x \in S \}$ 为凸.

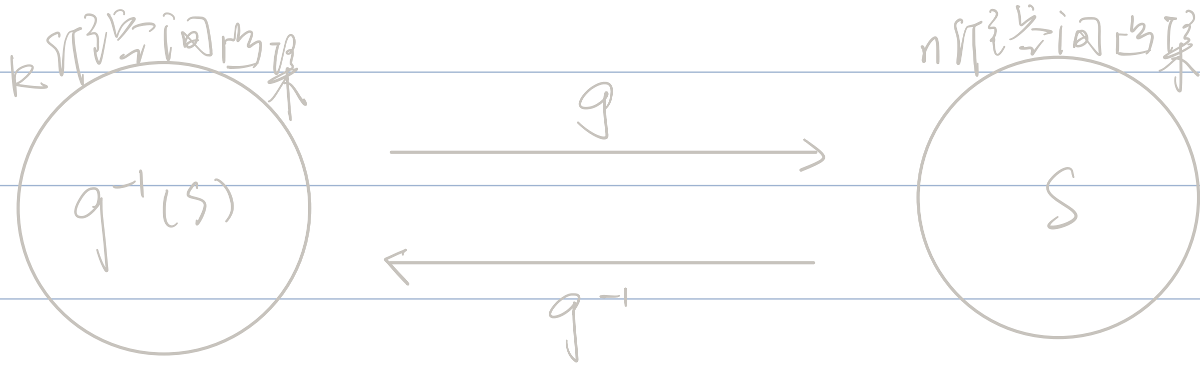


③ 含义：空间中，无论如何对凸集拉伸/旋转，变换后仍凸.

④ 若 $g: R^k \to R^n$ 为仿射 （逆映射，从n维空间映射回）

$g^{-1}(S) = \{ x \mid f(x) \in S \}$ 也是保凸的.

$x \in R^k$，$f: R^k \to R^n$



缩放、移位是保持凸性的

① $\alpha S=\{\alpha x \mid x\in S\}$ ，$\alpha\in R$（以α为比例缩放）

② $S+a=\{x+a \mid x\in S\}$

以上都属于仿射映射，不是非线性映射.

凸集的和 → 凸

$$S_1+S_2=\{x+y \mid x\in S_1,\ y\in S_2\}$$

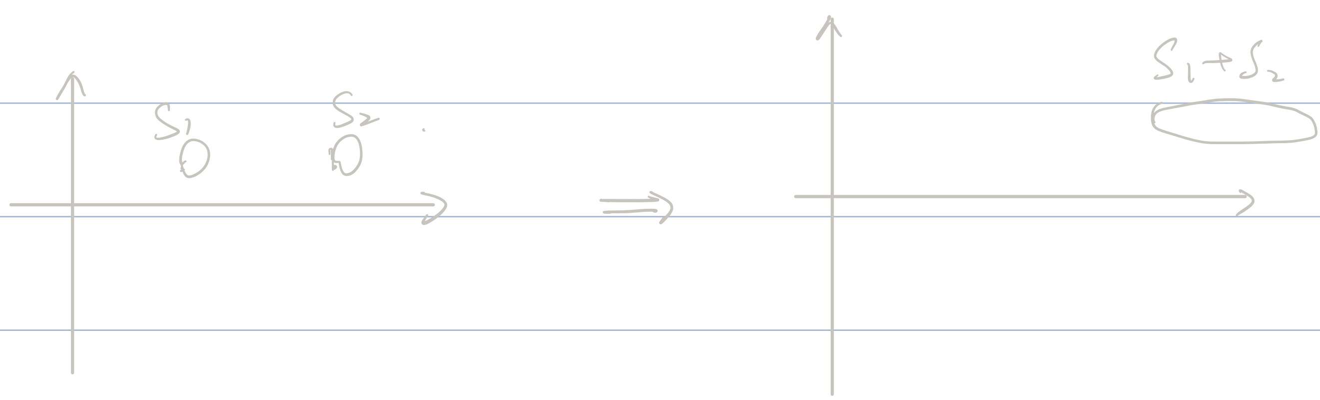
怎么理解？

定义 $S_1\times S_2=\{(x,y)\mid x\in S_1,\ y\in S_2\}$，仍凸.

设若 $x\in R$，$y\in R$，且有 $f(x,y)=x+y$，这显然是线性变化，

∴仍是凸集.

图：考虑二维空间的情况



注意：一个凸集 + 非凸集 ⇒ 有可能是凸集.

线性矩阵不等式 LMI

令 $A(x) = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n \preceq B$，$B$、$A_i$、$x_i \in S^n$

对称矩阵

$\downarrow$

$(A(x)-B) \preceq 0$

表示这个为半负定矩阵

已知A、B，则其解集 $\{x \mid A(x) \preceq B\}$ 为凸.（每个x都是多个矩阵）

证明：

1) 定义仿射变换 $f(x) \triangleq B - A(x)$，

该变换：$\underset{x}{\bigcirc} \longrightarrow \underset{B-A(x)}{\bigcirc}$

高阶矩阵空间 $\quad$ 低阶矩阵空间

$\downarrow$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\downarrow$

集合中元素：由多个对称的矩阵构成

集合中元素：1个对称矩阵

显然，该变换是线性的.（由A(x)可知）

2) 又知：S_+^n 为凸

$B-A(x)\succeq 0 \quad\quad S_+^n$

则有 $f^{-1}(S_+^n) = \{x \mid B-A(x) \succeq 0\}$ $\quad \bigcirc \rightleftarrows \bigcirc$

（$\because$ x满足 $A(x)-B \preceq 0$）

$\because S_+^n$ 凸，$\Rightarrow$ 则 $\{x \mid B-A(x) \succeq 0\}$ 是凸集. 得证.

理解不了可以把 x_i 看作标量.（即矩阵 — 标量）

椭球是球的仿射映射.

椭球：$\mathcal{E} = \{x \mid (x-x_c)^T P^{-1} (x-x_c) \le 1\}$, $P \in S^n_{++}$

单位球：$\{u \mid \|u\|_2 \le 1\}$

考虑将单位球 → 椭球：

$f(u) = P^{\frac{1}{2}} u + x_c$ （先左乘，再移位）

含义：$(P^{\frac{1}{2}})(P^{\frac{1}{2}}) = P$

得到新集合：

$\{f(u) \mid \|u\|_2 \le 1\}$

$= \{P^{\frac{1}{2}} u + x_c \mid \|u\|_2 \le 1\}$ ，令 $x \triangleq P^{\frac{1}{2}} u + x_c$

则 $u = P^{-\frac{1}{2}} (x - x_c)$

$\therefore = \{x \mid \|P^{-\frac{1}{2}} (x-x_c)\|_2 \le 1\}$

$= \{x \mid (x-x_c)^T [(P^{\frac{1}{2}})^{-1}]^T (P^{\frac{1}{2}})^{-1} (x-x_c) \le 1\}$

NOTE：向量 x 的二模 ≤ 1 即

$x^T x = a$ ，$a \in R$ ，且 $a \le 1$

由于 $(P^{\frac{1}{2}})(P^{\frac{1}{2}}) = P$

则 $(P^{\frac{1}{2}})^{-1} (P^{\frac{1}{2}})^{-1} = P^{-1}$ （$AB = C \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = C^{-1}$）

又 P 正定，得 $= \{x \mid (x-x_c)^T P^{-1} (x-x_c) \le 1\}$

透视函数 Perspective function

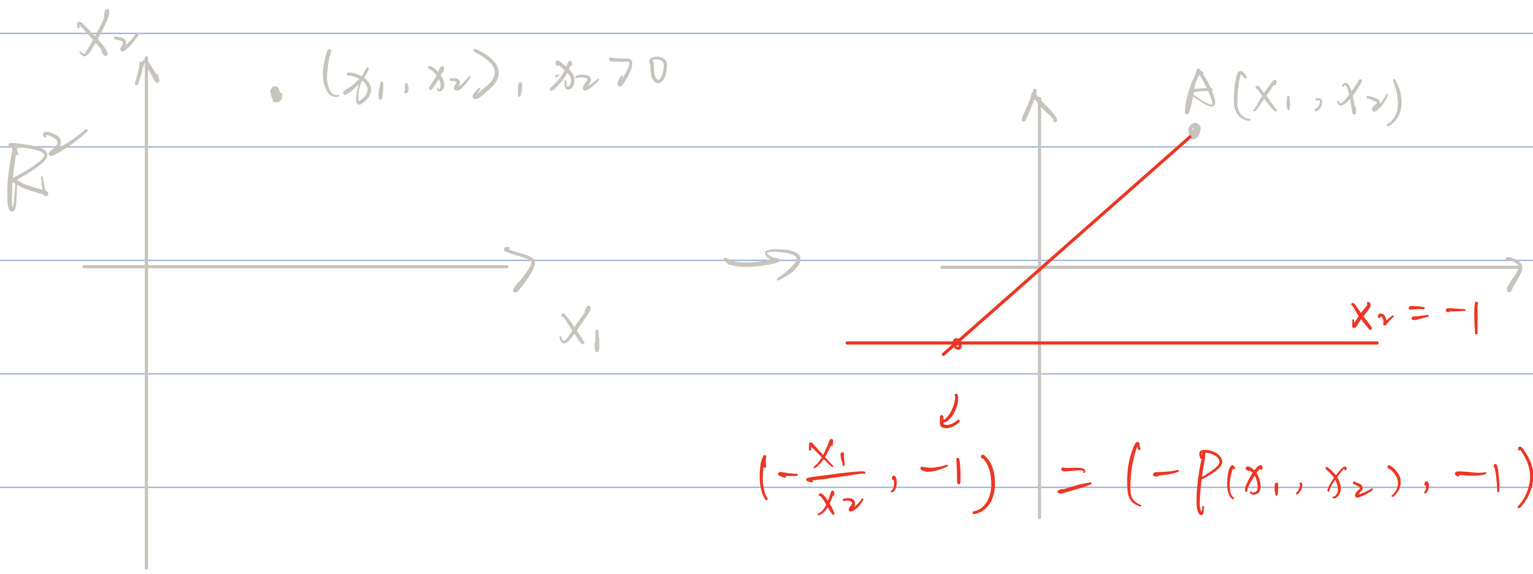
① $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n}$ （降维）

定义域：$\mathrm{dom}\, P = \underbrace{\mathbb{R}^{n}}_{\text{n维实空间}} \times \underbrace{\mathbb{R}_{++}}_{\text{正的一维实数空间}}$

表示前n个元素可任意取，但第n+1个的必须为正.

定义 $P(\underbrace{z,t}_{\text{z和t构成的向量}}) = \dfrac{z}{t}$ ， $z \in \mathbb{R}^{n}$， $t \in \mathbb{R}_{++}$

这个变换的含义：每个元素/最末元素，末位扔掉



理解：透过A点往原点方向看到新的点.

② 一个凸集，经透视函数变化后，仍为凸集.

例1：考虑 R^{n+1} 维线段，有 $x=(\tilde{x}, x_{n+1})$，$y=(\tilde{y}, y_{n+1})$

$\tilde{x} \in R^n$　$x_{n+1} \in R_{++}$　　$\tilde{y} \in R^n$　$y_{n+1} \in R_{++}$

x、y 为 R^{n+1} 维线段中的点.

可写出线段：$\theta x+(1-\theta)y$，$\theta \geq 0$.

证明：该线段经透视函数后，仍为凸集，且还是线段

对 x, y 做透视变换得到两新点.

$x \xrightarrow{P} P(x)$　　　$y \xrightarrow{P} P(y)$

原线段中有点 $\theta x+(1-\theta)y$，对其做 P 变换

$$P(\theta x+(1-\theta)y)$$

$$=\frac{\theta\tilde{x}+(1-\theta)\tilde{y}}{\theta x_{n+1}+(1-\theta)y_{n+1}}$$

$$=\boxed{\frac{\theta x_{n+1}}{\theta x_{n+1}+(1-\theta)y_{n+1}}}\cdot\frac{\tilde{x}}{x_{n+1}}+\boxed{\frac{(1-\theta)y_{n+1}}{\theta x_{n+1}+(1-\theta)y_{n+1}}}\cdot\frac{\tilde{y}}{y_{n+1}}$$

记为 μ，显然 $\mu\in[0,1]$　　　$=1-\mu$

$$=\mu P(x)+(1-\mu)P(y)$$

这个式子表示：

线段中的每一点经 P 变换后形成的新点可以表示为一个线性组合，且还是一个凸组合

对 $\forall\theta$，〇 所圈的等式都成立. 如果变化 θ：

每变化一个θ，即得到一个对应的μ，利用μ去形成一个凸组合（其中的$P(x)$、$P(y)$是由x、y经P变化而得）则该组合形成的是$P(x)$、$P(y)$间线段中某一点.

① $\forall x, y \in S$，$\theta x+(1-\theta)y \in S$

② 对$\forall x, y$，$P(x)=\dfrac{\tilde{x}}{x_{n+1}}$，$P(y)=\dfrac{\tilde{y}}{y_{n+1}}$

而 $\mu P(x)+(1-\mu)P(y) \overset{?}{\in} P(S)$

$\because$ 易知 $P(\theta x+(1-\theta)y) \in P(S)$

而 $P(\theta x+(1-\theta)y)=\theta' P(x)+(1-\theta')P(y)$

$\therefore$ 即?成立，T仍为凸集（θ'的$\forall$性?）

需要证明$\theta \to \mu$的映射是一对一的.

思考：逆透视函数的映射是否保凸？

C为一个集合，$C \subseteq R^n$，通过$P^{-1}(C)$将其映射到R^{n+1}

令$P^{-1}(C)=\{(x,t) \in R^{n+1} \mid \frac{x}{t} \in C,\ t>0\}$

证明其保凸性：

考虑 $(x,t)\in P^{-1}(C)$，$(y,s)\in P^{-1}(C)$，$0\le\theta\le 1$

有 $\frac{x}{t}\in C$，$\frac{y}{s}\in C$，由于 C 凸

$$\therefore\ \theta\cdot\frac{x}{t}+(1-\theta)\frac{y}{s}\in C$$

那么：$\mu(x,t)+(1-\mu)(y,s)\overset{?}{\in}P^{-1}(C)$

即 $(\mu x+(1-\mu)y,\ \mu t+(1-\mu)s)\overset{?}{\in}P^{-1}(C)$

即证：$\dfrac{\mu x+(1-\mu)y}{\mu t+(1-\mu)s}\in C$

令上式左半部分 $=\dfrac{\mu t}{\mu t+(1-\mu)s}\cdot\dfrac{x}{t}+\dfrac{(1-\mu)s}{\mu t+(1-\mu)s}\cdot\dfrac{y}{s}$

$$=\theta\cdot\frac{x}{t}+(1-\theta)\cdot\frac{y}{s}$$

显然，这个点是在 C 当中的 $\Rightarrow$ 得证.

线性分数函数

$g: R^n\to R^{m+1}$ 仿射（如下，对 x 线性变化）

$$g(x)=\underbrace{\begin{bmatrix}A\\ c^T\end{bmatrix}}_{\in R^{m+1\times n}}x+\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix},\ A\in R^{m\times n},\ c\in R^n$$

$$b\in R^m,\ d\in R$$

$P: R^{m+1}\to R^m$，定义与之前相同

现定义线性分数函数：

$f: R^n\to R^m\triangleq P\circ g$ （变量 x 先 g 变换，再 P 变换）

例：$f(x) = \dfrac{Ax+b}{c^T x+d}$ ，$\mathrm{dom} f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$

非线性，但是一个具备很好性质的函数（保凸）

保凸性证明

① 首先，任意一凸集 S 经 g 变换 → 凸集 $g(S)$

② $g(S)$ 经 P 变换 → 凸集 $P(g(S))$

例：两个随机变量的联合概率 → 条件概率（映射）

① 假设两个随机变量离散，

$u \in \{1, \cdots, n\}$ ，$v \in \{1, \cdots, m\}$

其联合概率：$P_{ij} = P(u=i, v=j)$

② 条件概率：$f_{ij} = P(u=i \mid v=j)$

③ 两者关系：$f_{ij} = \dfrac{P_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} P_{kj}}$ $(P_{1j} + P_{2j} + \cdots + P_{nj})$

↓

上式为一线性分数映射

问题：联合概率的这个集合是凸集吗？